

Cuprins

Teste de evaluare inițială	9
----------------------------------	---

ALGEBRĂ

1. ALGEBRĂ – RECAPITULARE CLASA A V-A	15
1.1 Numere naturale	15
1.2 Teorema împărțirii cu rest	18
2. MULȚIMI	19
2.1 Descriere, notații, reprezentări; mulțimi numerice/nenumerică; relația dintre un element și o mulțime; relații între mulțimi	19
2.2 Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite; mulțimi infinite, mulțimea numerelor naturale (\mathbb{N})	21
2.3 Operații cu mulțimi: intersecție, reuniune, diferență	24
2.4 Probleme recapitulative cu mulțimi	27
Teste de evaluare	30
3. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE (\mathbb{N})	32
3.1 Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime; aplicație: determinarea celui mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) și a celui mai mic multiplu comun (c.m.m.c.); numere prime între ele	32
3.1.1 Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	32
3.1.2 Cel mai mare divizor comun	36
3.1.3 Cel mai mic multiplu comun	38
3.1.4 Numere prime între ele	40
3.1.5 Exerciții recapitulative	42
3.2 Proprietăți ale divizibilității în \mathbb{N}	44
3.2.1 Divizori și multipli (recapitulare)	44
3.2.2 Criterii de divizibilitate (recapitulare)	47
3.2.3 Proprietăți ale relației de divizibilitate	50
4. RAPOARTE ȘI PROPORȚII	54
4.1 Rapoarte; proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor; determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție; proporții derivate	54
4.1.1 Rapoarte	54
4.1.2 Proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor	56
4.1.3 Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție	57
4.1.4 Proporții derivate	58
4.2 Șir de rapoarte egale; mărimi direct proporționale; mărimi invers proporționale; regula de trei simplă	61
4.2.1 Șir de rapoarte egale	61
Lucrări de verificare a cunoștințelor	63
4.2.2 Mărimi direct proporționale	65

4.2.3	Mărimi invers proporționale	66
4.2.4	Regula de trei simplă	68
4.3	Elemente de organizare a datelor; reprezentarea datelor prin grafice în contextul proporționalității; reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice; probabilități (aplicații la rapoarte)	70
4.3.1	Organizarea datelor și reprezentări grafice	70
4.3.2	Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice	75
4.3.3	Aplicații la rapoarte: scara unui plan și a unei hărți, probabilități, procente	76
	<i>Teste de evaluare</i>	84
5.	MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI	86
5.1	Mulțimea numerelor întregi; opusul unui număr întreg; reprezentarea pe axa numerelor; modulul unui număr întreg; compararea și ordonarea numerelor întregi	86
5.1.1	Mulțimea numerelor întregi; opusul unui număr întreg; valoarea absolută a unui număr întreg	86
5.1.2	Reprezentarea pe axa numerelor	87
5.1.3	Compararea și ordonarea numerelor întregi	88
5.1.4	Modulul (valoarea absolută) unui număr întreg	91
5.2	Adunarea numerelor întregi, proprietăți; scăderea numerelor întregi	95
5.2.1	Adunarea numerelor întregi	95
5.2.2	Proprietăți ale adunării numerelor întregi	98
5.2.3	Scăderea numerelor întregi	102
5.3	Înmulțirea numerelor întregi, proprietăți	106
5.3.1	Înmulțirea numerelor întregi	106
5.3.2	Proprietăți ale înmulțirii numerelor întregi	109
5.3.3	Factorul comun	112
5.4	Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului	113
5.5	Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul; reguli de calcul cu puteri	119
5.5.1	Puterea cu exponent număr natural	119
5.5.2	Operații cu puteri	121
5.6	Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	124
5.7	Ecuatii, inecuații, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în contextul numerelor întregi	126
5.7.1	Ecuatii	126
5.7.2	Inecuații	130
5.7.3	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor	131
6.	MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE (Q)	133
6.1	Număr rațional; mulțimea numerelor raționale; reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, opusul unui număr rațional; modulul; compararea și ordonarea numerelor raționale	133
6.1.1	Număr rațional; mulțimea numerelor raționale; forme de scriere a numerelor raționale	133
6.1.2	Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor; opusul unui număr rațional	142
6.1.3	Modulul (valoarea absolută) unui număr rațional	143
6.1.4	Compararea și ordonarea numerelor raționale	145
6.2	Adunarea numerelor raționale; proprietăți; scăderea numerelor raționale	149

6.2.1 Adunarea numerelor raționale	149
6.2.2 Proprietăți ale adunării numerelor raționale	153
6.3 Înmulțirea numerelor raționale; proprietăți; împărțirea numerelor raționale; puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul; reguli de calcul cu puteri	156
6.3.1 Înmulțirea numerelor raționale	156
6.3.2 Proprietăți ale înmulțirii numerelor raționale	157
6.3.3 Împărțirea numerelor raționale	158
6.3.4 Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul	161
6.3.5 Reguli de calcul cu puteri	162
6.4 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	163
6.5 Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$, ($a \neq 0$), $ax + b = c$, unde a , b și $c \in \mathbb{Q}$; probleme care se rezolvă folosind ecuații de acest tip	165
<i>Lucrări de verificare a cunoștințelor</i>	169
<i>Teste de evaluare</i>	171
7. ALGEBRĂ – RECAPITULARE CLASA A VI-A	173
7.1 Rapoarte și proporții	173
7.2 Mulțimea numerelor raționale (\mathbb{Q})	175
7.3 Operații cu numere raționale	178
7.4 Ecuații	181
7.5 Probleme recapitulative	181
<i>Teste de evaluare</i>	185

GEOMETRIE

8. GEOMETRIE – RECAPITULARE CLASA A V-A	189
8.1 Puncte, drepte, plane	189
8.2 Segmente de dreaptă	193
<i>Lucrări de verificare a cunoștințelor</i>	196
8.3 Unghiuri	198
9. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE	201
9.1 Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi, construcția bisectoarei unui unghi	201
9.2 Unghiuri suplementare, unghiuri complementare; unghiuri opuse la vârf, congruența lor; unghiuri formate în jurul unui punct, suma măsurilor lor	203
9.2.1 Unghiuri complementare, unghiuri suplementare	203
9.2.2 Unghiuri opuse la vârf, congruența lor; unghiuri formate în jurul unui punct, suma măsurilor lor	205
<i>Lucrări de verificare a cunoștințelor</i>	206
9.3 Drepte paralele (definiție, notație, construcție intuitivă prin translație); axioma paralelelor; criteriile de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă); aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice	209
9.3.1 Drepte paralele; axioma paralelelor	209
9.3.2 Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă	210
9.3.3 Criterii de paralelism	212
9.3.4 Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice	214
9.4 Drepte perpendiculare în plan	216
9.4.1 Drepte perpendiculare în plan (definiție, notație, construcție); oblice; distanța de la un punct la o dreaptă	216

9.4.2 Mediatoarea unui segment; construcția mediatoarei unui segment; simetria față de o dreaptă	219
9.4.3 Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice	220
9.5 Cercul	222
9.5.1 Cerc (definiție, construcție); elemente în cerc	222
9.5.2 Unghi la centru; măsuri	223
9.5.3 Pozițiile unei drepte față de un cerc	225
9.5.4 Pozițiile relative a două cercuri	226
<i>Lucrări de verificare a cunoștințelor</i>	228
10. TRIUNGHIUL	229
10.1 Triunghiul: definiție, elemente; clasificare; perimetru	229
10.2 Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi	232
10.2.1 Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi	232
10.2.2 Unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior	234
10.3 Construcția triunghiurilor: cazurile LUL, ULU, LLL; inegalități între elementele triunghiului (observate din cazurile de construcție)	234
10.4 Linii importante în triunghi	236
10.4.1 Bisectoarele unghiurilor unui triunghi: concurența, cercul înscris în triunghi	236
10.4.2 Mediatoarele laturilor unui triunghi: concurența, cercul circumscris unui triunghi	238
10.4.3 Înălțimile unui triunghi: definiție, construcție, concurență	240
10.4.4 Medianele unui triunghi: definiție, construcție, concurență	241
10.5 Congruența triunghiurilor	243
10.5.1 Criterii de congruență a triunghiurilor oarecare: LUL, ULU, LLL	243
10.5.2 Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice: CC, IC, CU, IU	247
10.5.3 Definiții, axiome și teoreme	250
10.5.4 Metoda triunghiurilor congruente, aplicații: proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi/mediatoarea unui segment	252
<i>Lucrări de verificare a cunoștințelor</i>	256
10.6 Triunghiul isoscel, echilateral și dreptunghic	260
10.6.1 Proprietăți ale triunghiului isoscel	260
10.6.2 Proprietăți ale triunghiului echilateral	264
10.6.3 Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	266
<i>Lucrări de verificare a cunoștințelor</i>	271
11. GEOMETRIE – RECAPITULARE CLASA A VI-A	273
11.1 Mic memorator cu definiții, axiome și teoreme	273
11.2 Exerciții și probleme	276

LUCRĂRI RECAPITULATIVE

<i>Modele de lucrări scrise (teze)</i>	281
--	-----

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

12. INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	287
--	------------

1.2 Teorema împărțirii cu rest

Fiind date două numere naturale D și \hat{I} , $\hat{I} \neq 0$, prin împărțirea lor obținem alte două numere naturale C și R , astfel încât $D = \hat{I} \cdot C + R$ și $0 \leq R < \hat{I}$. Numerele C și R sunt unice.

- Exemple:*
- Pentru $D = 7$, $\hat{I} = 2$ obținem $C = 3$, $R = 1$, iar $7 = 2 \cdot 3 + 1$, $1 < 2$.
 - Pentru $D = 23$, $\hat{I} = 9$ obținem $C = 2$, $R = 5$, iar $23 = 9 \cdot 2 + 5$, $5 < 9$.
 - Pentru $D = 5$, $\hat{I} = 11$ obținem $C = 0$, $R = 5$, iar $5 = 11 \cdot 0 + 5$, $5 < 11$.

1 Aflați câtul și restul împărțirilor:

- a) $29 : 5$; b) $44 : 6$; c) $8 : 16$; d) $234 : 12$; e) $4532 : 25$; f) $7418 : 21$.

2 Care din relațiile următoare reprezintă teorema împărțirii cu rest? În caz favorabil precizați deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul.

- a) $34 = 3 \cdot 9 + 7$; b) $48 = 5 \cdot 8 + 8$; c) $51 = 6 \cdot 7 + 9$; d) $23 = 4 \cdot 5 + 3$.

3 Scrieți numerele naturale care la împărțirea cu 7 dau câtul 5.

4 Aflați cel mai mic și cel mai mare număr natural de două cifre care la împărțirea: a) cu 8 dă restul 3; b) cu 9 dă restul 5; c) cu 7 dă restul 6.

5 Aflați cel mai mic (mare) număr natural de 3 cifre care la împărțirea: a) cu 10 dă restul 9; b) cu 17 dă restul 9; c) cu 25 dă restul 15.

6 Aflați numerele naturale cuprinse între 50 și 80 care împărțite pe rând la 3 sau 5 dau de fiecare dată același rest.

7 Aflați cel mai mic număr natural care la împărțirea cu 2 dă rest 1, iar la împărțirea cu 3 dă restul 2.

8 Arătați că nu există niciun număr natural care la împărțirea cu 4 să dea restul 3, iar la împărțirea cu 6 să dea restul 4.

9 Arătați că nu există număr natural par care la împărțirea cu 8 să dea restul 3.

10 Câte numere de două cifre dau restul 7 la împărțirea cu 8? Aflați suma lor.

11 Suma a două numere naturale este 161, iar la împărțire se obține câtul 6 și restul 5. Aflați numerele.

12 Suma a două numere naturale este 95, iar la împărțire se obține restul 23. Aflați numerele.

13 Calculați restul împărțirii numărului $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 + 2003$ la 81.

14 Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la alt număr dă restul 24 și câtul 9.

15 Aflați suma tuturor numerelor de două cifre care nu se împart exact la 3.

2. MULȚIMI¹

2.1 Descriere, notații, reprezentări; mulțimi numerice/nenumerice; relația dintre un element și o mulțime; relații între mulțimi

- O mulțime este o **colecție de obiecte** distincte neordonate.
- O mulțime oarecare se notează cu litere mari: A, B, C, ..., X, Y, Z. Obiectele colecției se numesc **elementele mulțimii** și un element oarecare se notează cu litere mici: a, b, c, ..., x, y, z. Dacă un element x este situat într-o mulțime M spunem că x *aparține* mulțimii M și scriem $x \in M$. În caz contrar scriem $x \notin M$. Dacă o mulțime P este o parte dintr-o altă mulțime M spunem că P este o *submulțime* a lui M și scriem $P \subset M$ (citim „P inclus în M”). În caz contrar scriem $P \not\subset M$.

- **O mulțime poate fi reprezentată în trei moduri:**

1. Prin enumerarea elementelor sale, scrise o singură dată între acolade.

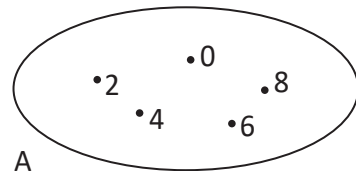
Exemplu: A (mulțimea cifrelor pare). $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ sau $A = \{2, 4, 8, 0, 6\}$.

Folosind faptul că ordinea enumerării elementelor nu este semnificativă pentru o mulțime, deducem că două mulțimi sunt egale dacă conțin aceleași elemente (indiferent de ordinea scrierii).

2. Prin precizarea unei proprietăți caracteristice comune tuturor elementelor:

Exemplu: Mulțimea cifrelor pare poate fi exprimată $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N} \text{ și } n < 5\}$.

3. Printr-o diagramă Venn-Euler (prezentarea elementelor în interiorul unei linii curbe închise).



- **Mulțimea numerelor naturale:**

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$$

- **Mulțimea numerelor natural nenule:**

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

- **Mulțimea vidă** nu are nici un element și se notează \emptyset (se citește „fi”, litera „F” a alfabetului grec); $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$ și este submulțime pentru orice mulțime A, $\emptyset \subset A$.

¹ Creatorul teoriei mulțimilor este matematicianul german Georg Cantor (1845-1918).

9 Dintre numerele de două cifre, alegeți pe cel mai mare și pe cel mai mic număr divizibil cu 3.

10 Scrieți cel mai mare și cel mai mic număr de trei cifre divizibil cu 7.

11 Determinați numerele de forma $\overline{32xx}$ divizibile cu:

- a) 3; b) 4;
c) 5; d) 10.

12 Scrieți toate numerele de forma $\overline{43x}$ divizibile cu:

- a) 2; b) 3;
c) 5; d) 4.

13 Aflați toate numerele divizibile cu 3 de forma: a) $\overline{23x}$; b) $\overline{4xx}$; c) \overline{xxx} .

14 Dacă numărul $\overline{abc} : 4$, atunci $\overline{bc} : 4$.

15 Dacă $\overline{abcd} : 8$, atunci $\overline{bcd} : 8$.

16 Dacă $\overline{abcd} : 125$, atunci $\overline{bcd} : 125$.

17 Determinați cifra x știind că numărul $\overline{345x}$ este divizibil cu:

- a) 4; b) 8; c) 25; d) 125;
e) 7; f) 11.

18 Aflați perechile de numere $(x; y)$ pentru care numerele de forma $\overline{x4y}$ sunt divizibile simultan cu 3 și 4.

19 Aflați toate numerele divizibile cu 6 de forma:

- a) $\overline{5x2}$; b) $\overline{53x}$; c) $\overline{xx4}$; d) $\overline{1xx}$.

20 Aflați numerele naturale de forma $\overline{x7y}$, divizibile cu 5, dar nedivizibile cu 3.

21 Aflați cel mai mic număr natural nenul n pentru care numărul $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ se divide cu:

- a) 10; b) 100; c) 1000.

22 Aflați cifrele x pentru care:

- a) $\overline{x26} + 121$ se divide cu 3; b) $\overline{24x} + 132$ se divide cu 5;
c) $\overline{13x} + 121$ se divide cu 4; d) $\overline{x81} + 234$ se divide cu 9.

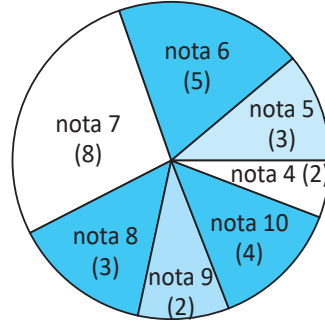
23 Precizați perechile $(x; y)$ știind că numerele $\overline{21x}$ și $\overline{3y2}$ sunt multipli de 3.

24 Găsiți toate fracțiile de forma $\frac{\overline{32a}}{\overline{5b2}}$ care se pot simplifica cu 4.

4.3.2 Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice

Reprezentați datele furnizate mai jos utilizând meniul *Insert*, comanda (butonul) *Chart*, șablonul *Line* din aplicația *Microsoft Office Word, Excel* sau *PowerPoint*, dacă:

1 Diagrama circulară alăturată reprezintă rezultatele la lucrarea scrisă la matematică din semestrul I la clasa a VI-a E.



2 La o lucrare scrisă, elevii din clasa a VI-a A au obținut notele:

4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7,
8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10.

3 Dintre elevii care participă la cercul de matematică, 8 au luat mențiuni la Olimpiada de matematică, etapa pe școală, 6 au luat premiul III, 4, premiul II și 3, premiul I. Restul de 6 elevi nu au participat la olimpiadă.

4 În tabel sunt date rezultatele obținute de elevi la un test.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	4	5	5	6	4	2

5 O cultură de cereale (porumb 25%, grâu 45%) și de legume (tomate 15%, vinete 10%, ardei 5%) ocupă o suprafață de 120 ha.

6 Situația statistică cu rezultatele unei lucrări scrise semestriale este dată în tabelul:

Nota	5-5,99	6-6,99	7-7,99	8-8,99	9-9,99	10
Nr. elevi	6	8	13	7	11	5

7 La un concurs sportiv, elevii unei școli au obținut 3 premii I, 2 premii II, 1 premiu III, două mențiuni, iar doi elevi nu au fost premiați.

Utilizați apoi și alte șabloane (de ex. *Column, Bar, Pie, Scatter* etc.). Comparați reprezentările realizate pentru același set de date cu trei din șabloanele menționate. Ce reprezentare preferați?

4.3.3 Aplicații la rapoarte

A. Scara unui plan și a unei hărți

- 1 Dacă într-un desen realizat la scara 1:50, un segment are 4 cm, ce lungime are în realitate?
- 2 Distanța dintre București și Pitești este de 100 km, iar pe hartă segmentul care reprezintă distanța are 5 cm. Care este scara acestei hărți?
- 3 Pe o hartă realizată la scara de 1:200 000, distanța dintre două localități este 3,5 cm. Care este distanța reală dintre cele două localități?
- 4 Scara unui desen este 1:400. Ce lungime va avea pe acest desen o distanță din teren de 250 m?
- 5 Care este distanța dintre două localități dacă pe o hartă executată la scara de 1:500 000, cele două localități sunt reprezentate prin două puncte aflate la distanța de 23,2 cm?
- 6 Planul unui teren executat la scara de 1:500 000 este un dreptunghi având perimetrul de 0,213 cm. Aflați perimetrul terenului.
- 7 Un dreptunghi de dimensiuni 6 cm și 8 cm reprezintă, la scara de 1:5000, planul unui teren. Care este perimetrul și aria terenului?
- 8 Planul unui teren, lucrat la scara de 1:2500, este figurat printr-un pătrat cu aria de: a) 1 cm²; b) 36 cm². Aflați aria terenului în fiecare situație.
- 9 Pe o hartă întocmită la scara 1:500 000, o localitate apare ca o figură plană cu aria de 25 cm². Câți km² are localitatea?
- 10 Un teren de fotbal are dimensiunile 50 m × 100 m.
 - a) Reprezentați pe caiet, păstrând proporțiile, terenul de fotbal.
 - b) La ce scară ați reprezentat terenul de fotbal?
 - c) Ce dimensiuni va avea desenul terenului de fotbal reprezentat la scara 1:10 000?

B. Probabilități

În teoria probabilităților, experiențele cu rezultat întâmplător sunt numite **experiențe aleatoare**. Rezultatele posibile ale unei experiențe se numesc **probe (cazuri)**. Vom numi **eveniment** asociat unei experiențe orice situație care se poate realiza prin una sau mai multe probe.

Exemplul 1. Considerăm experiența „scrieți un număr de două cifre diferite alese la întâmplare dintre 1, 2, 3”. Această experiență are 6 cazuri (probe): 12, 13, 21, 23, 31, 32.

Evenimentul „Obținerea unui număr par” se poate realiza prin două probe: 12 și 32.

Exemplul 2. Scrieți un număr de două cifre diferite alese la întâmplare dintre 1, 2, 3, 4. Această experiență are 12 cazuri (probe).

Probele diferă prin cifrele conținute, cât și prin ordinea cifrelor $13 \neq 42$, dar și $23 \neq 32$.

Exemplul 3. Se aruncă un zar și se urmărește numărul punctelor de pe fața superioară. Experiența are 6 probe.

Putem nota cu A evenimentul constând în apariția feței cu 1 sau cu două puncte.

Dacă notăm cu B evenimentul constând în apariția unei fețe cu 3, 4, 5 sau 6 puncte, cele două evenimente se numesc contrare (realizarea unuia condiționează nerealizarea celuilalt).

Evenimentul A este realizat de două probe, iar evenimentul B este realizat de patru probe.

Exemplul 4. Se aruncă simultan două zaruri și se urmăresc punctele de pe fețele superioare. Această experiență are un număr de 36 de probe care pot fi deduse după definiția produsului cartezian $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \times \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); \dots; (6; 4); (6; 5); (6; 6)\}$.

Enumerăm câteva evenimente:

- A – obținerea unei duble (6 probe);
- B – suma punctelor, divizibilă cu 3 (12 probe);
- C – suma punctelor, număr par (18 probe);
- D – suma punctelor, mai mare decât 10 (3 probe).

• Prin **probabilitate** înțelegem raportul dintre numărul probelor (cazurilor) favorabile realizării unui eveniment și numărul total al probelor experienței.